الاحتمالية والتوزيعات الاحتمالية

Probability and probability Distributions

5-1- العلاقة الوثيقة للاحتمالية بعلم الإحصاء

The Re levance of Probability to Statistics

بعد أن ناقشنا في الفصول السابقة العمليات التي يقع على عاتقها تلخيص البيانات وعرض النتائج المحصول عليها من مجموعات من الدراسة، وهذه الطرائق معروفة كما ذكرنا بالإحصاء الوصفي Descriptive Statistics والتي تعتبر خطوة مهمة وتعطى الأولوية في أي تحليل، وعادة ما يراد أن نحصل على النتائج من عينة ممثلة لمجتمعات كبيرة العدد ، وهنا يراد أن يحصل على استنتاجات من هذه المجتمعات باستخدام بيانات العينة .

لنفترض على سبيل المثال أن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتركيز الحديد في مصل الدم في عينة عشوائية لمجموعة من الطلاب مكونة 59 طالبا كان على التوالي 27.64 ميكرومول / لتر .و6.36 ميكرومول / لتر . نسبياً فمن غير المحتمل أن تكون هذه النتائج المحصول عليها في هذه العينة هي نتائج تعريفية لجميع المشاهدات عند الطلاب. وعموماً يراد غالباً أن نستخدم هذه المعلومات لنحصل على استنتاج لشيء ما في هذا المجتمع . إن هناك شك مصاحب لهذه الاستنتاجات المناطة حول هذا المجتمع ، هذا الشك في الحساب يمكن تقديره من خلال ما يدعى بالاحتمالية probability والتي هي أساس الاستنتاج الإحصائي Fundamental statistical inference والذي يقدم ربطاً بين نتائج العينة والمجتمع المأخوذة منه . وسنناقش مفاهيم الإحصاء الاستنتاجي inferential statistic في الفصول اللاحقة عندما نقوم بعرض طرق أخذ العينات وتوزيعات العينات أما هنا فسيعرض هذا الفصل ويناقش مفاهيم الاحتمالية بشيء من التفصيل .

5-1-1- مدخل الاحتمالية Introduction on probability :

تعني كلمة الاحتمال لغوياً إمكانية حدوث حادث معين، وهناك أمثلة عديدة لفهم معنى الاحتمالية ، على سبيل المثال إذا رمينا قطعة من النقود مرصع على إحدى حوافها نقش وعلى الجانب الآخر صورة فيقال أن هناك احتمالية أو فرصة لظهور صورة هي ½ أو 0.5 أي 50 % . أو أن نقول مثلاً هناك احتمال لحدوث فيضان إذا كان هناك مطرٌ غزيرٌ. إلا أن مثل هذا التعبير بمعناه اللغوي لا يعطينا فكرة عن مدى إمكانية حدوث هذا الاحتمال وهذا يشكل أحد الاختلافات الجوهرية بين المفهوم اللغوي للاحتمال والمفهوم الرياضي أو الإحصائي له . فالاحتمال في علم الإحصاء يمثل قيمة رقمية تعبر عن إمكانية حدوث الحادث وتقيس شدة إمكانية وقوع هذا الحدث .

إن العرض الأكثر شمولاً وفهما

لتفسير الاحتمالية في الاستنتاج الإحصائي هو أن تنسب الاحتمالية إلى نسب مئوية لعدد مرات حدوث حدث ما خلال تكرار هذا العدد مرات عديدة خلال تجربة أو تجارب عديدة أنجزت بنفس الظروف .

إن نتيجة أي من هذه التجارب أو المحاولات تجب أن تكون مستقلة بإجرائها عن التجربة أو المحاولات الأخرى، وهذا ما يدعى بالتعريف التكراري للاحتمالية لأنه يعنى بعد تكرارات حادثة ما ، في عدد كبير من هذه التكرارات لتجارب مشابهة وبهذا الشكل تعرف الاحتمالية بأنها تكرار نسبي لحدث ما في تجارب مكررة وضمن ظروف أو شروط متشابهة .

التعريف التقليدي للاحتمال Probability The Traditional Definition of :

نظرياً ، يمكن أن تعرف الاحتمالية (A) P بعدد الحالات النسبي الملائمة في التجربة إلى عدد الحالات الممكنة كما يلي :

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

حيث :

P (A) : الاحتمالية لتحقيق حدث ما .

m : عدد الحالات الملائمة المراد مشاهدتها .

n : عدد الحالات الممكنة الحدوث والتي يرمز لها عادة بالرمز Ω .

مثال :

إذا تم التقاء حجر نرد. A حدث بحيث أن A تمثل أي عدد فردي وهكذا على سبيل المثال

m = 3 ثلاث حالات ملائمة [1 , 3 , 5] = A , n = 6 ستة حالات ممكنة الحدوث هي

(1 و 2 و 3 و 4 و 5 و6) = Ω وبالتالي احتمالية A هي :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

2- التعريف الإحصائي للاحتمالية :

The statistical Definition of probability

فهنا يميل الإحصائيون إلى الاعتماد على المفهوم التطبيقي للتكرار النسبي فإذا رمينا قطعة نقود لا نهتم هنا بكون القطعة متجانسة أو غير متجانسة فإذا تكرار ظهور الصورة في قطعة النقود 65 مرة = m من أصل n = 500 رمية فيكون التكرار النسبي لظهور الصورة هو $\frac{m}{n}$ أي $\frac{65}{500}$ وهكذا يعرف الاحتمال إحصائياً لتحقيق حدث A بقيمة نهاية التكرار النسبي عندما ينتهي عدد المحاولات n إلى اللانهاية .

$$P(A) = \frac{Lim \frac{m}{n}}{n \to \infty}$$

5-2- خصائص الاحتمالية Properties of a probability :

من الواضح أن الاحتمالية تعرف بأنها تكرار نسبي أو نسبة مئوية لتكرار معينة وبالتالي فإن قيمتها الرقمية يجب أن تتراوح ما بين الصفر (0) والواحد (1) حيث أن قيمة الاحتمالية (0) تعني أن الحدث لا يمكن أن يحدث بينما قيمة الاحتمالية (1) تعني أن الحدث يمكن حدوثه وغالباً ما تحول قيم الاحتمالية إلى نسبة مئوية (وتتراوح ما بين الصفر و 100 %) أو يعبر عنها كتناسب

(مثلاً يحدث الحدث مرة واحدة كل ثلاث مرات من تكرار المشاهدات) .

في بعض الأحيان لا نعير الاهتمام على حدوث حدث ما إلا أنه نركز على الحدث الذي لا يحدث عادة . وهذا يتبع خصائص الاحتمالية التي يعبر عنها بأن احتمالية حدث لا يحدث عادة هي (1 – احتمالية حدوث الحدث) ولذلك فإن احتمالية إصابة هرة (قطة صغيرة) بالتهاب الحنجرة والقصبات الفيروسي بعد التحصين بفترة من (9) إلى (13) أسبوع من العمر هو 0.04 (في مكان محدد وزمن ما) فتكون الاحتمالية لتحقيق الحماية الكافية من هذا المرض هي 1 – 0.04 = 0.96 .

5-2-1- قوانين الاحتمالية Rules of Probability :

يوجد هناك قانونان أساسيان يحكمان ويسيطران على الاحتمالات وهما :

1- قانون جمع الاحتمالات :

عندما يكون هناك حدثان متبادلان التأثير استثنائياً فإن حدوث كلا الحدثين في نفس الوقت أمر غير منطقي ولا يمكن حدوثه، وعندئذ فإن الاحتمالية لحدوث واحد من الحدثين هي حاصل مجموع الاحتمالات لكل حدث .

مثال :

لنفترض أنه يوجد في صندوق كرتوني عدد متساو من كرات ذات ألوان فاتحة وأشكال مائلة إلى اللون الأسود (5 أشكال مختلفة) فإن احتمالية أخذ إما أشكال مرصعة باللون الفاتح أو متباينة الشكل من الصندوق الكرتوني هو حاصل مجموع احتمالية الكرات المرصعة باللون الفاتح (1/5) واحتمالية الأشكال المتباينة اللون (1/5) وهذا يعني احتمالية أخذ إحدى الشكلين:

$$1/5 + 1/5 = \frac{2}{5} = 0.4$$

2–قانون جداء الاحتمالات Multiplication rule

عندما يكون هناك حدثان مستقلان في حدوثهما، فإن الاحتمالية لحدوث كلا الحدثين هي حاصل جداء حدوث الاحتمالات الفردية في كل منهما .

مثال :

اذا تم رمي قطعتي نقود في نفس الوقت فان احتمال ظهور صورة لكل منهما في وقت واحد هو :

$0.5 \times 0.5 = 0.25$ أي جداء احتمال حدوثهما .

3– التوزيعات الاحتمالية Probability Distribution :

3–1– المتغيرات العشوائية Random variables :

يعرف المتغير العشوائي بأنه المتغير الذي يمكنه أن يأخذ أية قيمة من مجموعة مقادير أو قيم من نتائج تجربة لا يمكن أن تعرف نتيجتها قبل إجرائها وحيث يرتبط تحقق تلك القيم باحتمالات معينة .

وهكذا نجد أن العشوائية في مفهوم الاحتمالات تعرف بأنها عدم المعرفة المسبقة لنتيجة المحاولة أو التجربة المجراة وذلك بالرغم من أن الحصول على أية نتيجة للتجربة يرتبط بشكل أو بأخر باحتمال معين. وكمثال للعشوائية كما ذكرنا سابقاً هو رمي حجر النرد ونتيجة الرقم الذي سيظهر بنتيجة التجربة (رمي الحجر)، سيكون غير معروف مسبقاً ، فنقول عندئذ أن المتغير هنا هو متغير عشوائي ، وتمثل مجموعة قيمة من خلال جمع النتائج التي نحصل عليها من إجراء المحاولة لرمي الحجر (الأرقام من 1 – 6) .

وهكذا يتكون التوزيع الاحتمالي من كافة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي مع إمكانية كافة الاحتمالات المترافقة معه . ويوجد هناك أعداد كبيرة من التوزيعات الاحتمالية والتي يمكن أن نميزها من خلال ما يسمى بالمتغير العشوائي هذا وهناك نوعين من المتغيرات العشوائية وهما :

1– المتغيرات العشوائية المنقطعة أو المجزاة أو المقسمة (المنفصلة) :

Discreet random variables

والتي تأخذ قيم محددة في قاعدة البيانات أو مجاميع قابلة للعد ففي المثال المذكور أعلاه في رمي حجر نجد أن بحال تغير المتغير العشوائي هو الأعداد الطبيعية الصحيحة الموجبة من 1 إلى 6 ، نجد أن هذا المتغير منقطع لأنه لا يمكن أن يأخذ جميع القيم الحقيقية المحصورة ضمن حدي المجال مثل القيم 0.25 أو 2.5 أو 4.2 وغيرها .

2– المتغيرات العشوائية المستمرة (القيم المتصلة) : Continuous variables

وهي التي تأخذ قيماً غير محدودة ضمن قاعدة البيانات في مدى القيم كما فصلنا ذلك في الفضل الأول . إن المتغير العشوائي ذو القيم المستمرة يمكن أن يأخذ أية قيمة منتمية إلى مجال تغير المتحول العشوائي . كما هو الحال في قياس الوزن اليومي من 1.8 – 90 كغ فالمتغير هنا يمكن أن يأخذ أي قيمة بين القيمتين 1.8 و 90 كالقيمة 16.5 و69.2

3-3-المتغير الثنائي a binary variable

ومثال على ذلك كأن نقول هذا الشخص مريض أو سليم صحياً فالشخص المريض مثلاً يأخذ القيمة (1) بينما الشخص السليم مثلاً يأخذ القيمة (0) صفر .

4- التوزيع الاحتمالي : Probability Distribution

4-1-التوزيعات الاحتمالية المنفصلة / الغير مستمرة :

Discrete Probability Distributions

يعرف التوزيع الاحتمالي المنفصل بأنه يربط الاحتمالية لكل متغير له علاقة تبادلية مع كل متغير يعرف كمتغير عشوائي منفصل علماً أن مجموع هذه الاحتمالات هو الرقم واحد كوحدة كاملة .

يوجد هناك العديد من أنماط التوزيعات الاحتمالية المنفصلة والمختلفة عن بعضها تستخدم بشكل خاص وتتناسب باستخدامها مع العلوم الحيوية وهي التوزيعات الاسمية الثنائية الحدين The Binomial Distribution وتوزيعات بويسون Poisson Distribution وكما أشرنا سابقاً في هذا الفصل فإن هذه التوزيعات المنفصلة تكون عموماً مقربة للتوزيعات المستمرة .

4-1-1- التوزيع الاسمي الثنائي الحدين :

The Binomial Distribution

إن التوزيع الاسمي الثنائي الحدين يرتبط في هذه الحالة بنوع من المتغيرات ذات النوع الثنائي التقسيم للاستجابة الحيوية وهو ما يدعى بالمتغير الثنائي الحدين أو ما يدعى بمتغير بينري Binary . حيث يوجد هناك نتيجتين ممكنتين والتي سوف ندعوها بعبارة تجريبية (trial) .

على سبيل المثال، نقول مريض أو سليم وفي حالة أخرى نقول مثلاً أن هذا الشخص تظهر عليه الأعراض السريرية لمرض معدي أو لا تظهر عليه هذه الأعراض .

ومن هنا يمكننا أن نعرف التوزيع الاسمي الثنائي الحدين بأنه المتغير العشوائي والذي يمثل عدد النجاحات (نرمز في الإحصاء الحيوي بكلمة نجاح في التجربة الممثلة لحالة صحية كالمرض وكذا في حالة حدوث حدث ما لشخص معين كالوفاة) خلال سلسلة من المشاهدات عددها (n في تجارب مستقلة عن بعضها وفي كل تجربة يمكن أن تعطي نجاحاً (مع احتمالية π) أو فشلاً (وعبارة الفشل ترمز في علم الإحصاء الحيوي ليرمز لحالة الصحة أي عدم وجود المرض أو عدم حدوث حدث ما لحالة معينة كعدم وجود الحمل) (مع احتمالية $1 - \pi$) . ونظرياً يوجد هناك سلسلة من المشاهدات عددها (n) من النتائج في هذه الحالة .

وطالما أن هناك إمكانية لتشاهد نجاحاً واحداً أو اثنين أو ثلاثة أو .... حتى عدداً من النجاحات n في تجارب عددها n . فيرتبط التوزيع الاسمي الثنائي الحد باحتمالية كل نتيجة . وهذا يعني أن الفرق أو التباين $n\pi$ (في حالة النجاح) (أي حدوث حدث كالمرض أو الحمل) والاحتمالية $n\pi(1-\pi)$ (حالة الفشل : أي عدم حدوث الحدث كالصحة (أي عدم وجود المرض وانعدام الحمل) نسبياً .

هذا ويعتبر التوزيع الثنائي الحد هاماً بشكل كبير في الإحصاء الحيوي لأنه يلعب دوراً في تحليل النسب المئوية للأحداث الحادثة.

5-4-1-2- توزيع بواسون The Poisson Distribution :

وهو توزيع احتمالي منفصل آخر والذي يستخدم في العلوم الحيوية ويعرف توزيع بواسون بأنه بتضمن متغيرات عشوائية يتميز فيها توزيع بواسون بأنه يتمثل على شكل حساب مجموع أعداد

من الحوادث الحادثة عشوائياً بشكل مستقل في الزمان والمكان وبمعدل ثابت ويكون الوسط الحسابي والتباين في هذا التوزيع يساوي معدلاً ثابتاً .

وعلى سبيل المثال فإننا نستخدم توزيع بواسون لربط احتمالات لمجموع من الأعداد المرمزة لحوادث معينة (كالأمراض مثلاوغيرها من الأعداد الكمية) مثلاً كأن نقول 5550 من الحوادث الصغيرة والمأخوذة كعينة من حوادث الإصابات الإشعاعية والمعبر عنها حسابياً كتعداد الإصابات الإشعاعية خلال زمن معين أو قد يكون هذا المجموع الحسابي كأعداد فنقول (35) من الخلايا الدموية لحجم محلول في العينة أو كأعداد البيوض الطفيلية أو أعداد النباتات السامة أو أعداد الحالات المرضية لكل شخص لمرض ما خلال زمن معين ولنأخذ مثالاً على توزيع بواسون عن أعداد حالات التهاب المجاري التنفسية خلال سنة .

4-2- التوزيعات الاحتمالية المستمرة : (التوزيعات الطبيعية) :

Continuous Probability Distributions Normal Distributions

4-2-1- العلاقة بين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة والمستمرة :

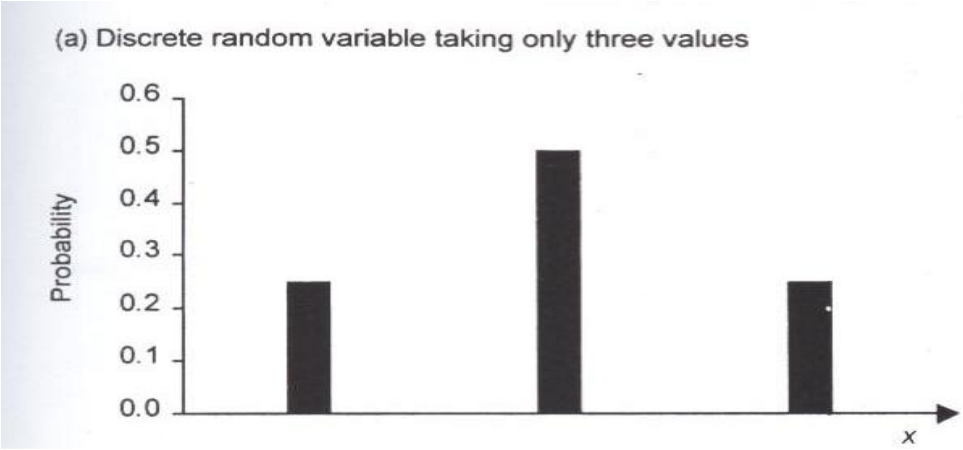
Relationship between discrete and continuous probability distributions

لكي نفهم هذه العلاقة بين التوزيعات الاحتمالية المستمرة والمنفصلة سنوضح ذلك من خلال هذه الأشكال :

يشير إلى الشكل a – 10 كمثال للتوزيعات الاحتمالية المنفصلة .

الشكل a – 10 : المتغير العشوائي المنفصل يأخذ ثلاث قيم

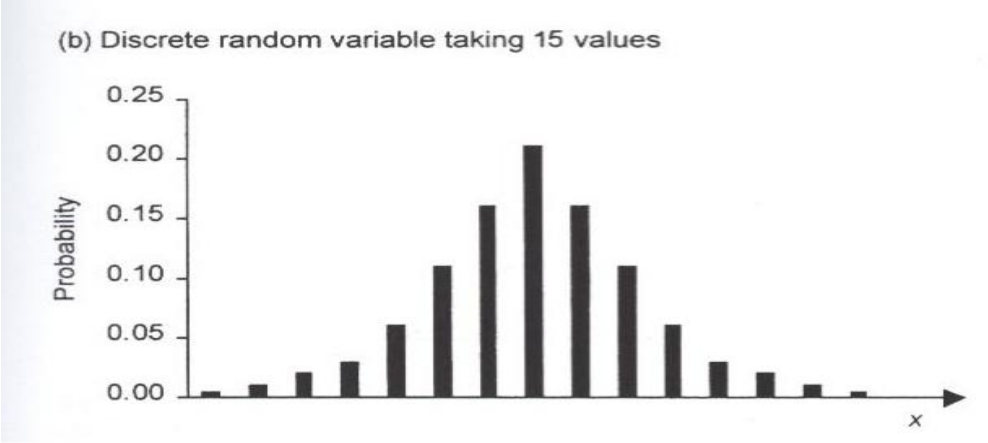
(0.25 و 0.25 و 0.50)



وبشكل بسيط جداً . إن كافة الحوادث الممكنة تمثل بشكل أفقي على المحور السيني بينما يتوضع على المحور العمودي العيني الاحتمالية لكل حدث كما أن مجموع الأطوال لمجموع الاحتمالات على هذا المحور يجب أن تساوي الواحد أيضاً ويشير الشكل b . 10 توضيح

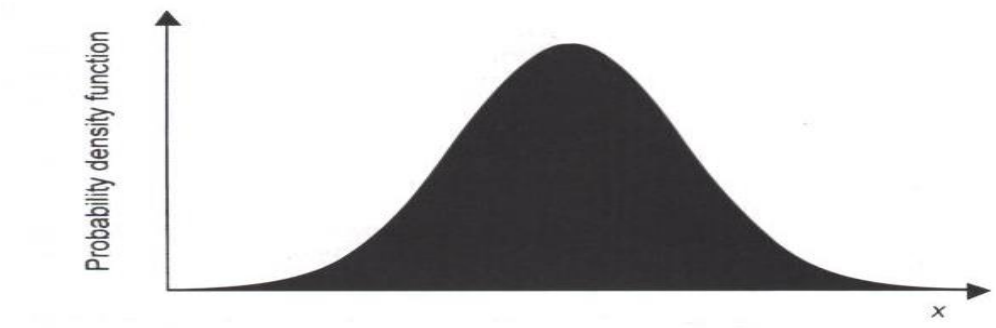
للتوزيعات الاحتمالية المنفصلة لمجموعة كبيرة من البيانات لكن أعدادها محدودة وهنا أيضاً يمثل قيم غير مستمرة لأعداد الحوادث الممكنة للمتغيرات العشوائية .

شكل 10.b المتغير العشوائي المنفصل يأخذ عدة قيم .



بينما يشير الشكل 10.C إلى تمثيل التوزيع الاحتمالي المتغير عشوائي مستمر . وبالمقارنة مع التوزيع الاحتمالي المنفصل فإن المتغير هنا يأخذ قيم أعداد غير محدودة (لا نهائية) ولذلك فمن المستحيل أن تمثل بخطوط منفصلة عن بعضها وتمثل المنطقة المظللة هنا إجمالي مجموع الاحتمالية للوحدة الممثلة ويدعى المنحى الذي يحدد ويعرف المنطقة بقانون الكثافة الاحتمالية probability density Function والتي توصف من خلال هذا القانون.

الشكل 10.C : قانون الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي مستمر



وإن مجموع إجمالي المنطقة المظللة (الشكل 10.C) تحت قانون الكثافة الاحتمالية هي تساوي القيمة واحد. وإن احتمالية المتغير العشوائي المستمر تمتد بين نقاط محددة معينة والتي تساوي تلك المنطقة الواقعة تحت تأثير قانون الكثافة الاحتمالية بين هذه الحدود وتحسب احتمالات هذه التوزيعات من خلال قوانين الكثافة الاحتمالية والتي ستشرح لاحقاً باستخدام قانون مربع كاي X^2 واختبار t ستدنت وتوزيعات F من خلال قوانين محددة لهذه الاختبارات

4-2-2- التوزيع الطبيعي أو توزيع غازيان :

The Normal (or Gassian) Distribution

إن التوزيع الطبيعي أو ما يدعى بتوزيع غازيان هو نسبة للباحث C . F . Gauss وهو باحث ألماني في القرن الثامن عشر وهو باحث رياضي يعتبر من أهم الأشخاص الذين وضعوا أسساً للتوزيع المستمر وهو قانونه في نظرية أخذ العينات والتي سوف تشرح في فصول لاحقة

إن عبارة طبيعي (Normal) لا تعني أن نطبق التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بشكل نموذجي ومع ذلك فهو يعتبر تقريب جيد لهذا التوزيع في العديد من المتغيرات الحادثة طبيعياً أو تلك التي تمثل مجموعات فردية غير مريضة ولنميز التوزيع الطبيعي عن التفسيرات الطبيعية الأخرى فإننا سنستخدم حرف كبير (N) للإشارة إلى التوزيع الطبيعي في هذا الكتاب .

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة التي تستخدم في معظم المجالات التطبيقية ومختلف فروع الطب والعلوم الاقتصادية والزراعية والاجتماعية . وتتساوى في هذا التوزيع قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال وبالتالي فإن مسقط قمة التوزيع على المحور السيني يقسم السطح المحصور بين منحنى التوزيع والمحور السيني إلى قسمين متساويين تماماً ويعتبر التوزيع متناظراً حول مسقط قمة التوزيع أي متناظراً حول الوسط الحسابي للتوزيع

إن التوزيع الطبيعي هو توزيع نظري حيث في الغالب نجد أن المشاهدات التي نشاهدها من خلال متغير ما في مجموعة من الأفراد لها توزيع تكراري تجريبي والتي تشابه التوزيع الطبيعي (N) وعندئذ فإننا نضع افتراضاً هو أن التوزيع لهذا المتغير في هذه المجتمعات هو توزيع طبيعي . وإذا كان هذا افتراض معقول فإنه يمكننا أن نستخدم خصائص التوزيع الطبيعي لتقييم الاحتمالات المطلوبة . ويتميز التوزيع الطبيعي بالخصائص التالية :

1- يوصف التوزيع الطبيعي بشكل كامل من خلال حدين اثنين وهما الوسط الحسابي والانحراف المعياري . هذين الحدين يرمز لهما بالأحرف اليونانية γ (للوسط الحسابي) و σ (الانحراف المعياري) والقانون الرياضي لقانون الكثافة الاحتمالية قد أهمل هنا فقط لتبسيط هذا الوصف .

2- يشكل التوزيع الطبيعي وحدة نموذج كاملة Vnimodal .

3- التوزيع الطبيعي متناسق بشكل نظامي حول الوسط الحسابي وهذا يطبق في المنحنى التوزيعي حيث أن الوسط الحسابي في الجزء اليميني من التوزيع هو خيال مرآة للمنحنى في الجزء اليساري منه وهو يوصف هذا التوزيع بشكل الجرس bell – shaped .

4- وهذا يعني أنه في التوزيع الطبيعي يكون الوسط الحسابي والوسيط والمنوال متساوية.

5- إذا بقي الانحراف المعياري بدون أن يتغير فإن هناك زيادة في قيمة الوسط الحسابي تؤثر على المنحنى التوزيعي أفقياً من جهة اليمين .

بالمقابل فإن أي انخفاض في قيمة الوسط الحسابي تؤثر على المنحنى أفقياً من الناحية اليسرى للتوزيع .

6– كما أن انخفاض قيمة الانحراف المعياري للمنحنى تجعل المنحنى أكثر تضيقاً (ترقيقاً) أي يصبح ذو قمة طويلة وأكثر ارتفاعاً وبالمقابل فإن زيادة الانحراف المعياري تجعل المنحنى أكثر انفتاحاً (انفراجاً) أي ثخانة وأقصر وأكثر انبساطاً.

7– إن الحدود ما بين (M– ó) و (M + ó) تشمل 68 % من التوزيع

8– وتتضمن الحدود ما بين (M – 1.96 ó) و (M + 1.96 ó) 95 % من التوزيع وهذه الحقيقة غالباً ما تستخدم في حساب المدى المرجعي كما وضحنا في الفصول السابقة .

9– كما أن الحدود ما بين (M – 2.58 ó) و (M + 2.58 ó) تشمل 99 % من التوزيع وهكذا إذا أردنا معرفة عدد أو نسبة القيم المحصورة بين قيمتين X_1 و X_2 من قيم التوزيع يمكنك أن تبحث عن نسبة السطح المحصور بين X_1 و X_2 من السطح الإجمالي وذلك بإجراء تكامل تابع للكثافة الاحتمالي $\int_{x1}^{x2} f(x)dx$ لكن صعوبة هذا الحساب يقودنا إلى البحث عن طريقة أخرى لحساب السطح المحصور بين X_1 و X_2 ولذلك نستعين بتوزيع آخر يسهل التعامل معه يسمى التوزيع الطبيعي المعياري .

4–2–3– التوزيع الطبيعي المعياري :

Standardized of Normal Distribution

إذا كان Z متغيراً عشوائياً يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري فيكون الوسط الحسابي لهذا التوزيع صفراً Z = 0 وعندئذ فإن الانحراف المعياري لهذا يعادل القيمة 1+ (ó = 1) وحيث أن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لا يتغيران فإن هذا التوزيع يكون ثابتاً . كما أن هذا التوزيع طبيعياً كما تم التنويه عيه في التوزيع الطبيعي بحيث يحصر من السطح تحت المنحنى قيمة من السطح الكلي لمجموع قيم التوزيع ويعطي تابع الكثافة الاحتمالي لهذا التوزيع على الصورة .

$$\int(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} eZ^{2/2}$$

ولقد تم وضع جداول خاصة من قبل الإحصائيين بالتوزيع الطبيعي المعياري تعطي ومن أجل كل قيمة للمتغير العشوائي Z قيمة السطح لما قبل القيمة Z المحصور ما بين منحنى التوزيع والمحور الأفقي .

$$\int_{-\infty}^{Z} F(Z)dz = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^{2/2}} dz$$

ويرفق في ملحق هذا الكتاب جدولاً للتوزيع الطبيعي المعياري والذي يعطي القيم للسطح ما بين Z الموجب والصفر . يتألف هذا الجدول من عدد من الأعمدة والصفوف حيث خصص العمود الأول للقيم Z والتي تحتوي الرقم الصحيح وعلى رقم عشري واحد بعد الفاصلة بينما يخصص الصف الأول للرقم العشري الثاني (أجزاء المئة) من قيمة Z والتي تتراوح قيمتها في الجدول من –3.09 إلى 3.09 والتي تحصر عملياً كافة قيم التوزيع (جميع أجزاء السطح) .

4-2-4- التوزيعات الاحتمالية المستمرة الأخرى :

يوجد العديد من التوزيعات الاحتمالية المستمرة تعبر جزءاً من التوزيع الطبيعي. حيث أن هناك ثلاثة من هذه التوزيعات معروفة جداً وتعتبر مفيدة في الدراسات الإحصائية حسب نمط الدراسة وهي توزيع t ستودنت (توزيع t) وتوزيع مربع كاي X^2 وتوزيع F هذه التوزيعات سوف يتم مناقشتها ودراسة اختبارات t و X^2 و F في الفصول القادمة إلا أننا سنتعرض للخصائص العامة لكل من هذه التوزيعات .

خصائص توزيع t ستودنت :

يعتبر توزيع t من التوزيعات الاحتمالية المستمرة ومن أهم استخداماته هي اختبار الفرضيات وقضايا التقدير عندما يتعلق موضوع الدراسة بعينات صغيرة أو عندما تكون قيمة σ^2 (الفرق) في منطقة الدراسة مجهولة فعندئذ نحل محله تباين العينة (فرق العينة) حيث يعطى بالقانون التالي :

$$t = \frac{\bar{x} - M}{s/\sqrt{n}}$$

حيث أن :

n =حجم عينة مأخوذة من مجتمع ما .

M: الوسط الحسابي لمجتمع ما غير معروف انحرافه المعياري .

$\bar{x}$ = الوسط الحسابي للعينة .

S = الانحراف المعياري للعينة .

t = المتغير العشوائي لستودنت .

وفيما يلي نورد أهم خصائص هذا التوزيع :

1- إن توزيع t هو توزيع متناسق ومتناظر حول الوسط الحسابي ولذلك فهو يأخذ شكل جرس الناقوس حيث له قمة وحيدة .

2- يتميز بشكل خاص بما يدعى بدرجات الحرية degrees of freedom (df) ومعرفتنا بدرجات الحرية هذه تسمح بحساب الاحتمالية لتوزيع t (سيدرس في الفصول القادمة بشكل مفصل) .

3- إن توزيع t هو توزيع لا يميز عن التوزيع الطبيعي المعياري عندما تكون درجات الحرية كبيرة ولكن كلما انخفضت درجات الحرية فإن توزيع t يصبح أكثر فأكثر انتشاراً أو انبساطاً بمنحاه بالمقارنة مع التوزيع الطبيعي المعياري .

4: فهو توزيع متناظر حول المستقيم العمودي $t = 0$.

5: عندما يكون حجم العينة n فيكون عدد درجات الحرية $n-1$ إلا أن هناك حالات تكون فيها عملية الحساب مختلفة بالنسبة إلى درجات الحرية وسنشير إلى ذلك في حينه .

ولحساب المساحات تحت المنحنى t فهناك جدولاً قد صمم بشكل خاص من قبل الإحصائيين لحساب المساحات تحت منحنى t ستودنت وقد وضع في ملحق هذا الكتاب . حيث يتم من خلال استخدامه إيجاد مساحات $\propto$ بعد معرفة قيمة درجات الحرية (df) حيث يتضمن جدول t قيم درجات الحرية وقيم المساحات $\propto$ المرتبة في الصف الأول بينما يشمل الجزء الباقي من الصفوف والأعمدة في الجدول المذكور قيم المتغير العشوائي t . يرمز لقيم t داخل الجدول بالرمز $t(\propto. df)$.

ومن خلال معرفة قيمة t ودرجات الحرية df تظهر مساحة ∝ المطلوبة في أعلى العمود الذي تظهر فيه قيمة t ونكتب $\propto = p[t < (\propto , df)]$

خصائص توزيع مربع كاي $\propto^2$:

- يمكن أن يأخذ توزيع مربع كاي فقط القيم الإيجابية .
- يتميز أيضاً هذا التوزيع بما يسمى بدرجات الحرية ولذلك فإن معرفتنا لها تسمح بتحديد الاحتمالات المناسبة تحت المنحنى .
- كلما زادت درجة الحرية فإن التوزيع يصبح أكثر فأكثر تناظراً من الجهتين وبالحقيقة يتميز بالطبيعية .

خصائص توزيع F:

- إن توزيع F هو توزيع تناسبي (مئوي) .
- يتميز أيضاً بدرجات حرية منفصلة ذات جزئين وهذا يرتبط بصورة (بسط) ومخرج (مقام) التناسب المحدد .
  - على الرغم من أن هذا التناسب يمكن أن يأخذ قيمة أكبر أو أصغر من القيمة واحد فإن الاحتمالات المجدولة لتوزيع F ترتبط بالتناسب والذي يكون غالباً أكبر من القيمة (1) . فعلى سبيل المثال يمكن أن يكون البسط (الصورة) في التناسب أكبر من المقام (المخرج) . وهكذا فإن القيم المجدولة تشير فقط إلى الجزء العلوي المرتفع من التوزيع (اختبار F سوف يدرس تفصيلاً في الفصول القادمة)

4-3- العلاقات بين التوزيعات Relationships between distributions

4-3-1- التقريبات الطبيعية لتوزيعي بواسن والتوزيع ثنائي الحدين الاسمي

Normal approximations of the Binomial and Poisson distributions

إن التوزيع ثنائي الحدين الاسمي وتوزيعات بواسن تكون منحرفة باتجاه الناحية اليمنى من المنحنى عندما تكون أحجام العينة صغيرة على الرغم من أنها تصبح أكثر تناظراً كلما ازدادت أحجام العينات. وبالحقيقة فإن كل توزيع بطريقته يمثل التوزيع الطبيعي بالنسبة لأحجام العينات الكبيرة بشكل كاف، عندما يكون المنحنى الخطي يمثل قيماً احتمالية لقيم الاحتمالية لمتغيرات منفصلة لنأخذ بعين الاعتبار حالة التوزيع الاسمي ثنائي الحدين عندما نشاهد نسبة مئوية (P) عند حدوث حمل في تجارب عددها (n) ، فمن المعقول أن نستخدم التقريب الطبيعي للتوزيع الاسمي ثنائي الحدين إذا كانت كلا من قيمة $n \times p$ والقيمة $n\times(1-p)$ هي أكبر من القيمة 0.5 وإن الوسط الحسابي والفرق لهذا التوزيع الطبيعي يقدر بالقيمة $(n\times p)$ والقيمة $n\times p\ (1-p)$ نسبياً . هذا التقريب يعتبر مفيداً بشكل خاص في الاستنتاج الإحصائي لاختبار فرضية العدم عند حساب حدود الثقة للنسب المئوية (كما سنرى في الفصل التاسع).

مثال : لنفترض أنه في يوم ما عدد من الاطفال $(n = 18)$ أخذ إلى العيادة للتشخيص بإصابتها بالتهاب القصبات وقد كانت النسبة المئوية للاطفال المصابين هي $\frac{6}{18} = 0.33$ وعندئذ فإن القيمة : $np = 18 \times 0.33 = 6$

كما أن قيمة : $n(1-p) = 18 \times (1-0.33) = 18 \times 0.67 = 12$

وهكذا فإن التقريب الطبيعي للتوزيع هو مماثل ومناسب لكل جزء من المنحنى وعليه فإن الوسط الحسابي والفرق لهذا التوزيع الطبيعي يقدر بالقيمة :

$np = 18 \times 0.33 = 6$

$np\,(1-p) = 18 \times 0.33 \text{ X } 0.67 = 3.98$

وهكذا إذا أردنا أن نقيم احتمالية أن عشرة اطفال أو أكثر يتوقع بأن تصاب بالتهاب القصبات فإننا نحدد القيمة :

$$Z_1 = (10-6)\sqrt{3.98} = 2.01$$

ويشار إلى هذه القيمة في الجدول A1 كما هو مدرج في الملحق .

وبتقسيم الاحتمالية المجدولة بالرقم 2 لأننا مهتمين بدراسة فقط الجزء العلوي من المنحنى من هذا التوزيع فإننا نجد أن الاحتمالية المطلوبة تقدر بالقيمة 0.02 (هذه القيمة تعتبر مقربة إلى فاصلتين عشريتين 0.0222) .

العينات وتوزيع العينات :

Sampling and sampling Distribution

6-1- التميز بين مصطلح العينة والمجتمع

The distinction between the sample and the population :

عندما نرغب بجمع معلومات من مجتمع ما فإنه من غير الممكن –إلا ما ندر– أن نفحص كل عضو في المجتمع عندما نقوم بإجراء تقييم إحصائي وبدلاً عن ذلك يمكن أن نأخذ مجموعة صغيرة كعينة مختارة من المجتمع ومن ثم نفحص أعضاء هذه المجموعة . وتستخدم النتائج لتقدير بعض مميزات هذا المجتمع .

وهكذا فإن الأهداف الرئيسة لأخذ العينات هي عبارة عن الحصول على البيانات التي تسمح لنا بإجراء الاستنتاجات المتعلقة بدراسة أعداد كبيرة اعتماداً على فحص العينة ودراسة علاقتها على سبيل المثال بوجود أو عدم وجود المرض في بلد او منطقة ما . وربما تتعلق استنتاجات لإثبات أن المرض غير متواجد في هذه المنطقة ، وبشكل معاكس يمكن أن تهدف لإثبات وجود المرض أو تقييم مستوى حدوث المرض.

6-2- الاستنتاج الإحصائي Statistical Inference :

يتم الحصول على الاستنتاج الإحصائي من المجتمع المدروس من خلال أخذ العينة وهذا الاستنتاج يمكننا بأن نرسم الاستنتاجات حول جوانب معينة من المجتمع المدروس عندما تكون لهذا مجاميع كبيرة مقسمة إلى مجاميع أخرى أصغر فعندئذ فإن العينة تكون ضرورية للتقصي عن حالة معينة فمن المهم جداً أن نعي أن التميز بين العينة والمجتمع المأخوذ منه العينات كمكون أساسي للنظرية الإحصائية يتمثل بالاستنتاج الإحصائي يوجد هناك نقطتان أساسيتان في الاستنتاج الإحصائي والتي تلعب دوراً مهماً في التحليل الإحصائي : وهي طريقة التقدير

estimation واختبار النظرية hypothesis testing وسنناقش في هذا الفصل طريقة التقدير بنيتي يركز اختبار النظرية في قرارنا في اعتماد النتائج التي حصلنا عليها من خلال العينات المأخوذة أو أن النتائج المحصول عليها لا يمكن اعتمادها نظراً لوجود بعض العوامل أو الأسباب المتداخلة مع المسبب المدروس وهذا ما سنناقشه لاحقا.

6-2-1- تقدير حدود المجتمع باستخدام العينة الإحصائية :

Estimation of Population parameters using the Statistical Sampling

إن الغرض من أخذ العينة كي نتعرف على جوانب عدة للمجتمع المدروس وهذه الجوانب تتلخص بعبارة حدود المجتمع population parameters وهي التي تميز توزيع المجتمع المدروس ويمكن وصف توزيع بيانات المجتمع إذا ما عرفنا طبيعة القيم التي حصلنا عليها في هذه البيانات والتي ناقشناها في الفصول السابقة. ومن غير الممكن أن نحدد الوسط الحسابي للمجتمع بشكل تام عندما نختار فقط العينة من المشاهدات الملاحظة في مجتمع ما . فعلى سبيل المثال لا يمكننا أن نعرف القيمة الدقيقة لمعدل أعداد المشاركين في سباق الجري عندما تكون في حالة الجري عند السباق ولكنا نعرف عدد أسرة المرضى الثابتة الموجودة في غرفة . والشيء الأمثل الذي يمكن أن نقوم به هو تقدير هذه القيمة من العينة. فمثلاً نحسب العينة الإحصائية والتي لها قيمة قريبة ما أمكن للقيمة الحقيقية لحد المجتمع إلا أن تقدير معدل العينة هو أفضل من طريقة تقدير معدل المجتمع، فعلى حين أن معدل العينة هو عبارة عن مجموع أعداد كافة المشاهدات في العينة مقسوماً على أعداد المشاهدات في العينة بينما معدل المجتمع هو مجموع كافة المشاهدات في المجتمع مقسوماً على أعداد المشاهدات في هذه الحالة .

6-2-2- خطأ العينة Sampling error :

ليس من الإمكانية بمكان أن تكون قيمة العينة الإحصائية مساوية تماماً لقيمة حد المجتمع التي قمنا بتقديرها . فيجب علينا أن نوصي أن هناك دائماً احتمالية بوجود خطأ في التقدير لأننا أخذنا العينات من حالات دون النظر إليها جميعها وهذا ما ندعوه بخطأ العينة Sampling error ونحتاج إلى تقييم الدقة للعينة الإحصائية كتقدير لحدود المجتمع المدروس ، ومن أجل هذا الغرض فإننا نحسب ما يدعى الخطأ المعياري للتقدير Standard error of the estimate ويمكننا حساب الخطأ المعياري للمعدل (والذي يرمز بـ SEM) .

من خلال القانون : $SEM = \frac{s}{\sqrt{n}}$

حيث أن القيمة s تحسب من خلال : $s = \sqrt{\frac{(x - \bar{x})^2}{n-1}}$

حيث أن : s : الانحراف المعياري

n : عدد المشاهدات

x: قيمة المشاهدة

$\bar{X}$: معدل قيمة المشاهدة .

6-2-3- التفريق بين الانحراف المعياري والخطأ المعياري للمعدل

The distinction between the standard deviation and the standard error of the mean :

لقد ناقشنا في فصول سابقة الانحراف المعياري SD ونتناول في هذا الفصل الخطأ المعياري للمعدل SEM . وهما قياسان لهما تطبيقات مختلفة عن بعضهما بشكل كبير ومن المهم هنا أن

يكون لدينا فهم واضح للتمييز بين الانحراف المعياري للمشاهدات والخطأ المعياري للمعدل وهذا التفريق يجنبنا سوء التفسير للبيانات المدروسة :

– إن الانحراف المعياري هو قياس لتشتت المشاهدات . وهو يعطى مؤشر إلى مدى تقارب المشاهدات لمعدلاتها ويمكن أن يستخدم لإنشاء حد مرجعي reference interval والذي يعرف بمدى التشتت للبيانات

– بينما الخطأ المعياري للمعدل هو قياس دقة معدل العينة كتقدير لمعدل المجتمع. وهو يقيم خطأ العينة بإعطاء مؤشر إلى مدى التقارب بين معدل العينة ومعدل المجتمع المأخوذة منه العينات ويستخدم الخطأ المعياري المعدل لإنشاء ما يدعى بحد الثقة confidence interval والذي يسمح لنا بأن نحكم على دقة تقديرنا لمعدل المجتمع المدروس .

6-3- حد الثقة للمعدل The confidence interval for a mean :

6-3-1- مفهوم حدود الثقة Understanding confidence intervals :

لقد ركزنا دائماً على أن توزيع العينات بالنسبة للمعدل هو توزيع افتراضي Hypothetical distribution . وفي ممارستنا العملية لا نأخذ عينات متكررة من المجتمع المدروس وإنما نأخذ عادة عينة واحدة فقط وتستخدم هذه العينة كتقدير لمعدل القيم المأخوذة من المجتمعات المدروسة . وهذا يعطينا تصويراً لدرجة الدقة في تقديراتنا لهذه المجتمعات المدروسة. يجب أن ينوه هنا ان استخدام عينة واحدة من كل فرد عند التحليل تجنبنا مشكلة أساسية في التحليل الإحصائي والتي يسمى بمشكلة القياسات المتكررة repeated measures وهذا يعطي نتائج الدراسة دقة أكثر وهناك العديد من البرامج الإحصائية الحاسوبية التي تجنبنا هذه المشكلة بشكل

مباشر كبرنامج ،SAS ، وغيره من البرامج الإحصائية وإذا كان لدينا قياسات متكررة فيجب أخذ معدل النتائج لدراسة مشكلة ما في هذا المجتمع أو ذاك .

وإن أفضل طريقة لتقييم فيما إذا كان تقديرنا جيد هو أن تعرف مدى القيم ضمن معدل القيم الحقيقية للمجتمع المدروس والتي يحدد ضمن احتمالية معينة هذا المدى للقيم يعرف بالحدود العليا والدنيا upper and lower limits (وهو ما يسمى بحدود الثقة) ويدعى حد الثقة بالنسبة للمعدل Confidence intervol for the mean

1- إذا كان حد الثقة كبيراً فإن معدل العينة يكون عندئذهو تقدير غير دقيق بالنسبة لمعدل المجتمع المدروس .

2- إذا كان حد الثقة صغير أو ضيق المدى فيكون عندئذ معدل العينة هو تقدير جيد فهو بشكل آخر ذو تقدير دقيق بالنسبة لمعدل الحالات المدروسة .

إن الثقة 95% تمثل أن معدل القيم في الحالات المدروسة تشمل ما يدعى بحد الثقة 95% بالنسبة للمعدل و نحسب بشكل نموذجي حد الثقة 95% لأي حد من الحدود المراد معرفة دقة الحساب فيها . لكننا يمكن أن نجد أحياناً حدي الثقة 95 %أو 99% مستخدمة في بعض الدراسات . حيث أن حد الثقة 99% هي بالتأكيد أكثر شمولاً ودقة من حد الثقة 95% لأنها تتطلب بهذه الحالة أكثر ثقة للحد الذي يشمله ذاك أو هذا الحد . ويعتمد مدى اتساع حد الثقة على :

1- درجة الثقة المطلوبة .

2- حجم العينة (فالحجم الكبير للعينة يتطلب تقديراً أكثر دقة وبالتالي حد ثقة بمجال ضيق) .

3- توفر الخاصية المتعلقة بالتقصي عن الحالة (فوجود متغيرات أكثر لعدد من المشاهدات المدروسة يتطلب تقدير أقل دقة وبالتالي حد ثقة بمجال أوسع)

6-3-2- حساب حد الثقة بالنسبة للمعدل

Calculating the confidence interval for the mean

إن القانون العام لحد الثقة بالنسبة للمعدل يحسب كما يلي :

$$CI\ 95\% : \overline{X} \mp 1.96 \times SEM$$

حيث أن :

$\overline{X}$: المعدل .

1.96 = ثابت .

SEM: الانحراف المعياري للمعدل وحيث أن : $SEM = \frac{Q}{\sqrt{n}}$

حيث أن : Q: الانحراف المعياري .

n: عدد المشاهدات .

فيصبح القانون :

$$\overline{X} \mp 1.96 \times \frac{Q}{\sqrt{n}}$$

$$\left(\overline{X} - 1.96 \times \frac{Q}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96 \times \frac{Q}{\sqrt{n}} \right)$$

ويتراوح مدى حد الثقة الأعلى والأدنى من خلال الحصول على القيم المحسوبة في القانون من القوسية المذكورة أعلاه P .

إن الثابت بالنسبة لحد الثقة 95% هو 1.96 (يقرب غالباً إلى القيمة 2)

بينما الثابت بالنسبة لحد الثقة 99% هو 2.58

والثابت بالنسبة لحد الثقة 90% هو 0.68

وعندما تكون قيمة الانحراف المعياري Q (الانحراف المعياري المجتمع المدروس) مجهولة فعندئذ نستعيض عنه بالانحراف المعياري الخاص بالعينة والذي يحسب من خلال القانون التالي :

$$S = \sqrt{\frac{\sum (X - \overline{X})^2}{n-1}}$$

إن هناك قوانين أخرى لحساب حد الثقة وخاصة بالنسبة لتوزيع T ستودنت ولا مجال لتفصيلها وشرحها هنا لأن القانون العام المذكور أعلاه يمكن تطبيقه عندما يكون توزيع القيم للمشاهدات هو توزيع طبيعي .

6-4- التوزيع المئوي (النسب المئوية) للعينة :

The sampling Distribution of the proportion

إن مفهوم التوزيع المئوي للعينة هو نفس ذلك التوزيع المتعلق بمعدلات العينات المدروسة فهو توزيع افتراضي لخصائص مشاهدات تكون فيها الفوائد مقدرة عندما نريد أن نحصل على استنتاج إحصائي حول النسب المئوية لمجتمع أو مجموعات من حالات نريد دراستها .

ويمتاز توزيع النسب المئوية للعينات بالخصائص التالية :

1- يعتبر هذا التوزيع قريباً من التوزيع الطبيعي إذا كان أن حجم العينة كبيراً. وفي الواقع إن توزيع النسب المئوية هو في الحقيقة توزيع اسمي لكن كما شرحنا فإن هذا التوزيع أقرب إلى التوزيع الطبيعي لعينة كبيرة عد مشاهداتها n.

2- إن معدل قيم توزيع النسب المئوية للعينات هو معدل النسبة لجميع المجتمع المدروس وتقدر بالقيمة π وهكذا فإن النسب المئوية للعينة p تحدد من خلال عينة وحيدة مستفردة هو تقدير غير منحرف بالنسبة للنسبة المئوية لجميع الافراد المدروسة

3- إن الانحراف المعياري لتوزيع العينات هو النسبة المئوية التي تحسب خلال القانون :

$$\sqrt{\pi(1-n)/n}$$

وهو ما يدعى بالخطأ المعياري للنسبة المئوية وعبارة عن قياس دقة p كتقدير لقيمة π وهذا الخطأ المعياري يحسب من خلال قيم مشاهدات العينة كما يلي :

$$SE(P)=\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

حيث أن قيمة P تحسب كما يلي : $P=\frac{r}{n}$

n: حجم العينة . r = عدد المشاهدات في العينة .

وعلى الرغم من أنه يمكننا تقدير قيمة π من خلال حساب قيمة p فإن توزيع العينة المئوية تبقى كتوزيع قريب للتوزيع الطبيعي لعينة كبيرة الحجم عدد مشاهداتها n .

ويجب أن نلاحظ أننا إذا استبدلنا تقدير قيمة p بنسبة مئوية p% فإن تقدير الخطأ المعياري يحسب كنسبة مئوية من خلال القانون :

$$SE(P\%)=\sqrt{\frac{P\%(100-P\%)}{n}}$$

6-5- حد الثقة للنسبة المئوية

The confidence interval for a proportion

إن حد الثقة لنسبة مجموعات الدراسة π يحسب من خلال إضافة وطرح النسبة المئوية للعينة (p) مضروباً بالخطأ المعياري وهكذا فإن حد الثقة 95% لنسبة مجموعة الدراسة يمكن أن يقدر من خلال القانون التالي :

$$P\mp 1.96\times SE(P)=$$

$$\left\{P-1.96\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}},P+1.96\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\right\}$$

ويجب أن نلاحظ أيضاً أننا يمكن أن نعدل القانون المذكور أعلاه إذا أردنا أن تكون القيمة المدروسة على شكل نسب مئوية وذلك من خلال استبدال كل نسبة مئوية بالقيمة المئوية واستبدال القيمة (1) داخل كل جذر تربيعي بالقيمة 100 .

مثال : تم اختيار عينة عشوائية مكونة من 115 شخص في إحدى المناطق . اختبرت عينات الدم المحصول عليها من أفراد هذه العينة للبحث عن وجود أضداد الجدري الكاذب وحسب معايير الأضداد المحصول عليها فقد صنفت إلى أضداد إيجابية وأخرى سلبية . ففي هذه العينة وجد أن هناك 36 شخص او حالة تحمل معايير أضداد إيجابية لهذا المرض . إن تقدير النسبة المئوية للأفراد المعرضة لداء الدوران يمكن أن تحسب كما يلي: p= 36/115 = 0.31

وهكذا يمكن أن يقدر الخطأ المعياري في هذه النسبة كما يلي :

$$SE_{(P)} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.313(1-0.313}{115}} = 0.043$$

وبالتالي يمكن أن نحسب حد الثقة لنسبة الافراد المعرضة للإصابة كما يلي :

$$CI95\% = P \mp 1.96\ SE(P)$$

$$= (0.313 - 1.96 \times 0.043\ ,\ 0.313 + 1.96 \times 0.043)$$

$$= (0.228\ ,\ 0.398)$$

وهكذا فإن ثقتنا 95% للنسبة الحقيقية للأفراد المعرضة للإصابة تتراوح بشكل تقريبي ما بين 0.23 إلى 0.40 .

مدخل إلى اختبار الفرضيات

An Introduction to Hypothesis Testing

يمكن أن نقسم عموماً الفرضية أو النظرية الإحصائية إلى جزئيين :

1- يوجد هناك ما يسمى بالإحصاء الوصفي descriptive statistics حيث يستخدم فيه أدوات العرض المناسبة كالجداول النموذجية والأشكال والقياسات الرقمية لوصف قاعدة البيانات وتقديم عرض مختصر عن توزيعها .

2- بالإضافة إلى ذلك يوجد هناك ما يدعى بالإحصاء الاستنتاجي أو الاستدلالي inferential statistics والذي يركز على إعطاء الاستنتاجات لمجتمع ما مستخدماً الناتج التي حصلنا عليها من العينة الممثلة للمجتمع المدروس والمأخوذة من هذا الأخير .

a- وإن إحدى النقاط في الاستدلال الإحصائي هي قضايا التقدير estimation لحدود المجتمع المدروس باستخدام العينة الإحصائية المناسبة (على سبيل المثال ، معدل المجتمع المدروس يمثل من خلال معدل العينة المأخوذة منه) . كما أن قضايا التقدير تكتمل فقط عندما تكون هناك دقة في عملية التقدير والتي تحدد من خلال الخطأ المعياري أو يعطى مؤشر لهذه العملية حد الثقة المدروس.

b- النقطة الثانية في الاستدلال الإحصائي هي اختبار الفرضية Hypothesis testing . وفي هذه الحالة فإننا نقوم بفحص الفرضية ضمن عبارة واحد أو أكثر من المجتمعات المدروسة . كما أننا نريد أن نعرف فيما إذا كانت الفرضية حول هذا المجتمع أو المجتمعات الأخرى يمكن أن تدعم أو تمثل من خلال بيانات العينة .

إن قضايا التقدير للقيم تركز على عملية وصف القيم بينما يركز اختبار الفرضية بشكل غير محدود على اتخاذ القرار المناسب .

8-1- المفاهيم الأساسية لاختبار الفرضية :

إن اختبار الفرضية عملية تركز على إجراء الاستنتاجات حول المجتمع المدروس مستخدمين المعلومات المحصول عليها من العينة المأخوذة . ويجب أن نعي أنه من المستحيل أن نكون قادرين على التأكيد المطلق بأن استنتاجاتنا حول المجتمع هي صحيحة. حيث أن عينة واحدة مختارة من المجتمع من غير المحتمل أن تعطي نفس النتائج تماماً كما هي في العينة الثانية .

ولذلك يجب أن نحدد نتائجنا حول المجتمع المدروس باستخدام مفهوم الاحتمالية وهذا يعطي مؤشراً لفرصة الحصول على النتائج المشاهدة إذا كانت الفرضية حقيقية .

وهنا لا بد من استبدال عبارة الحالة المطلقة بعبارة الاحتمالية probabilistic وهذه الأشكال هي المضمون أو المفهوم لاختبار الفرضية وهكذا يمكن أن يتلخص مفهوم الفرضية الإحصائية بدراسة صحة ادعاء معين عن قيمة معينة ما للمجتمع الإحصائي كالوسط الحسابي أو النسبة أو التباين . كأن نقول مثلاً أن هذا الدواء ناجع بشكل ناجح بنسبة 95% لعلاج التهابات الكبد إلى غيرها من الافتراضات التي نود التأكد من صحتها.

8-1-1- نظرية العدم أو فرضية العدم The null hypothesis H0 :

ترتكز الدراسات للتقصي على فرضية معينة أو نظرية علمية حول المجتمع المدروس عادة على عملية مقارنة مع الحالة الطبيعية مشمولة ببعض التأثيرات الرقمية لموضوع الدراسة وغالباً ما تكون هذه المقارنة لمعالجات مختلفة وقياس استجابة هذه المعالجة يدعى بالتأثير العلاجي .

على سبيل المثال الفروقات بين مختلف العلاجات من حيث الوسط الحسابي .

لنفترض أننا نريد التقصي على نقص منغنيزيوم الدم عند مجموعات تجارب تتغذى على أغذية طبيعية فقيرة بالأملاح ومجموعات تجارب تتغذى على أغذية مضاف لها املاح معدنية فعندئذ

نريد أن نفحص قيم معدل بلازما الدم من المنغنزيوم . وهذا يقترح أن هناك خطورة في كفاية الأغذية الطبيعية الفقيرة من الاحتياجات الطبيعية للمنغنزيوم من عدمها . وبهذه الحالة يتشكل ما يدعى بنظرية العدم حول معدل القيم الحقيقية لمنغنزيوم البلازما والتي يفترض أن لا تختلف بين المجموعتين .

هذا ما يدعى بنظرية العدم null hypothesis ويرمز لها بالرمز Ho وقد تكون فرضية أو نظرية العدم غير حقيقية وعندئذ تدعى بالفرضية أو النظرية البديلة al tentative hypothesis ويرمز لها بالرمز H1 .

نتيجة :

هناك عادة فرضيتان في دراسة أي اختبار ، الأولى منها تدعى بنظرية أو فرضية العدم وهي الفرضية الأولية والتي غالباً ما تؤيد صحة الادعاء ويرمز لها بالرمز Ho والثانية هي الفرضية البديلة والتي هي أساساً لا تؤيد صحة الادعاء ويرمز لها بالرمز H1 .

عادة تذكر الفرضية البديلة أنه يوجد اختلاف بين قيم الحد لكن الاتجاه لهذا الاختلاف غير معروف . وهذا يقودنا إلى فرضية ذات جانبين أو اختبار الذيلين (two– sided or a two tailed test) .

8–1–2– الاختبار الإحصائي وقيمته

The test statis tistic and the p–value p

من البيانات التي حسبنا منها قيمة الاختبار الإحصائي – (وهو تعبير جبري معين للفرضية التي نختبرها) ، وعادة يستخدم الحاسوب لعملية الحساب هذه وأحياناً تحسب يدوياً – ويرفق بكل قيمة الاختبار الإحصائي ما يدعى بالاحتمالية probability وهو ما يدعى بالقيمة

p– (p–value) . وهي وهذه القيمة تصنف فرضية الحصول على تأثير القيم المشاهدة (وبعبارة أخرى أكثر توضيحاً) إذا كانت فرضية العدم حقيقية .

8–1–3– اتخاذ القرار باستخدام قيمة p Making a decision uoing the p–value :

1– إذا كانت النتائج المشاهدة غير مطابقة لما نتوقع وعندما تكون نظرية العدم حقيقية ، فإننا نستنتج أنه يوجد دلالة كافية لرفض نظرية أو فرضية العدم . ونقول أن نتيجة الاختبار إحصائياً هي معنوية Statistically significant .

2– وإذا كانت النتائج المشاهدة ثابتة مع ما نتوقع إذا كانت نظرية العدم حقيقية ونستنتج أنه لا يوجد دلالة كافية لتكون حقيقية وعندها نرفض فرضية (نظرية) العدم . ونقول أن نتيجة الاختبار غير معنوية non – significant .

وتسمح لنا قيمة (p) بأن نحدد فيما إذا كنا نملك دليلاً كافياً لرفض فرضية العدم بالمقارنة مع الفرضية البديلة .

– إذا كانت قيمة (p) صغيرة جداً فعندئذٍ من غير المحتمل أن نستطيع الحصول على النتائج المشاهدة إذا كانت فرضية العدم حقيقية ولذلك ترفض فرضية العدم Ho .

– أما إذا كانت قيمة p كبيرة جداً فعندئذ يوجد هناك فرصة كبيرة بأن نحصل على النتائج المشاهدة إذا كانت فرضية العدم حقيقية وعندئذ فإن فرضية العدم ترفض.

وبشكل واضح إن التمييز بين قيم (P) الصغيرة والكبيرة هو موضوع متروك لاتخاذ القرار المناسب . فيجب أن نحدد قبل البدء بعملية جمع البيانات المكونة لقيم (p) سواء بقيمة صغيرة أم كبيرة وهنا لا بد من استخدام مصطلح مستوى المعنوية Significance level للاختبار . كما أن اختبار مستوى المعنوية يعتمد على طبيعة البيانات والظروف المتعلقة بالتقصي عن الحالة حيث هناك إمكانية تجعلنا مثلاً بأن نختار قيمة منخفضة جداً لمستوى المعنوية كأن نقول

المستوى 0.01 ، إذا كنا نريد أن ننظر إلى الجانب السببي لرفض نظرية العدم وهذا يعني أنه من خلال مثالنا فإننا نحصل على قيمة (p) والتي هي أقل من 0.01 فإننا نرفض نظرية العدم ونقول إن النتيجة معنوية عند المستوى 1% .

على سبيل المثال نريد التقصي فيما إذا كانت المعالجة بالصادات الحيوية مكلفة فإننا نريد أن نكون واثقين جداً من فوائدها خلال فترة المعالجة وكذا تكلفتها المادية . وهنا يمكن أن نختار القيمة الأكثر ارتفاعاً فنقول 0.10 في بداية الاختبار لفعالية اللقاح الكامن الجديد كبديل للشفاء أو الوقاية من المرض المعدي والذي يسبب خسائر فادحة وهذا يؤكد أن الفوائد المحصول عليها غير مؤكدة وتحتاج إلى قياس معنويتها . إن اختيار الفاصل القاطع Cut off point 0.05 هو غالباً يختار لمستوى المعنوية مثلاً إذا كانت قيمة p أصغر من 0.05 فعندئذ ترفض نظرية العدم ، أما إذا كانت قيمة p أكبر أو تساوي 0.05 فإن فرضية العدم لا ترفض . وهناك تمييزات إضافية تستخدم أحياناً باستخدام الإشارة النجمية:

(***) تمثل p (p< 0.0001) وهي معنوية واضحة جداً .

(**) تمثل قيمة (P<0.001) وهي معنوية واضحة .

(*) تمثل قيمة (0.01 <p<0.05) وهي معنوية وعندما لا توجد معنوية ترمز بالرمز (NS) وعندها تكون قيمة p أكبر من 0.05 .

وبشكل آخر المعنوية الواضحة جداً تكون ضمن المجال [0.0000–0.0001]

المعنوية الواضحة تكون ضمن المجال [0.0001–0.001]

معنوية فقط [0.001–0.01]

ونذكر كلما صغرت قيمة (p) كلما كان هناك دليل أوضح ومؤكد ضد نظرية العدم .

ومن المهم الإشارة هنا إلى أن قرار الأخذ بصحة الفرضية أو رفضها لا يعني القطيعة في الحكم ذلك أننا نقبل بالفرضية أو نرفضها باحتمال ثقة معين يفترض أن يكون كبيراً ومقنعاً مما يعني أننا قد نرفض فرضية وهي صحيحة أو نقبل بفرضية وهي خاطئة إلا أن احتمال وقوعنا بالخطأ سيصغر مع ارتفاع احتمال الثقة .

8-1-4- اشتقاق قيمة p Deriving the p-value :

بشكل نموذجي نحصل على قيمة p من التوزيعات المعروفة للاختبار الإحصائي وهي التوزيعات الطبيعية ، وتوزيع t ، F ، X^2

(والتي سوف تدرس لاحقاً في فصول لاحقة) . وإذا أنجز التحليل بالحاسوب فإن قيمة p التي نطلبها نحصل عليها بشكل مباشر من خلال نتائج الحاسوب وإذا كان من الضروري يمكن أن نحصل على قيمة p بالإشارة إلى الاختبار الإحصائي من الجدول المدرج بالتوزيعات المذكورة أعلاه .

8-1-5- درجات الحرية للاختبار الإحصائي

The degrees of freedom of the test Statistic

سوف نجد ن عبارة درجات الحرية (df) degrees of freedom مستخدمة بشكل مستمر في التحليل الإحصائي . فإذا ما قمنا باستخدام جداول لربط قيمة الاختبار الإحصائي إلى قيمة p فإننا عادة يجب أن نعرف درجات الحرية للتوزيع المناسب لاختبارنا الإحصائي المستخدم . إن درجات الحرية للاختبار الإحصائي هي عبارة عن عدد المشاهدات المستقلة المساهمة بتشكيل الاختبار الإحصائي فعلى سبيل المثال أعداد المشاهدات لتقييم الاختبار الإحصائي ناقص عدد المشاهدات المحددة بقيمها بحدود معينة . حيث أن أسهل طريقة لحساب درجات الحرية لأي

اختبار إحصائي هو أن نأخذها من خلال حساب الفرق بين عدد المشاهدات في العينة وعدد الحدود التي يجب أن نقدرها لكي نقيم هذه المشاهدات إحصائياً .

ولذلك لنفرض مثلاً أن تقديرنا لفرق المجتمع بكامله σ^2 لمتغير x في حجم عينة n من خلال عينة إحصائية S^2 يعطى من خلال القانون : $S^2 = \frac{\sum(X - \overline{X})^2}{(n-1)}$ (الفرق) يجب أن نقدر المعدل لكي نقيم قيمة الصورة ولذلك فإن درجات الحرية لهذا الفرق S^2 هي (n–1) حيث أن n هي عدد قيم المشاهدات .

8–1–6– ملخص عن إجراء اختبار الفرضية / النظرية / :

إن إجراء اختبار الفرضية :يتلخص في ستة مراحل :

1– حدد فرضية العدم Ho أو الفرضية البديلة المطلوبة في الاختبار .

2– اجمع البيانات وانظر بشكل شامل إذا كان هناك إمكانية للتقصي عن توزيعات هذه البيانات فهناك العديد من الاختبارات تحدد الافتراضات التوزيعية حول البيانات : افحص التوزيعات المحددة لهذا الاختبار .

3– على الحاسب ، اختر الاختبار المناسب ، أو باستخدام الحساب اليدوي المناسب لاختيار الاختبار الإحصائي المناسب مستخدمين بيانات العينة .

4– اربط القيمة المحسوبة بالاختبار الإحصائي بقيمة p .

5– اعتبر قيمة p لمحاكمات أو تحكيم فيما إذا كانت البيانات قابلة للتحكيم باستخدام فرضية العدم ومن ثم قرر فيما إذا كانت البيانات ترفض أو تقبل فرضية العدم .

6– إلا أنه من الأجدى والأنسب أن نحسب حد الثقة لتأثير موضوع الدراسة .

حيث أن نحدد المعنوية لنتيجة الدراسة في ضوء الإجراء السابق ولذلك هذا يدعى أحياناً باختبار المعنوية Significance test .

وكما سنرى لاحقاً إن اختبار الاختبار ليس سهلاً دائماً بل إنه يعتمد على طبيعة البيانات .

حيث أن الإجراء المنطقي يمكن متابعته من خلال اختبار الخوارزمية التالي والذي يقودنا إلى إجراء الاختبار المناسب .

2-8- الخطأ نمط I والخطأ نمط II Typ`e I and Type II Errors :

- عندما نجد نتيجة الاختبار معنوية ففي هذه الحالة نرفض فرضية العدم في مستوى المعنوية المدرجة . فإذا كان الاستنتاج غير صحيح و حقيقة المعدلين المدروسين متساوين فعندئذ نرفض فرضية العدم وعندما لا ترفض (عندما تكون حقيقية ..) فنكون قد حددنا نمط الخطأ I .

- وبشكل آخر أو بديل ، عندما نجد نتيجة الاختبار غير معنوية فعندئذ لا ترفض فرضية العدم عند مستوى المعنوية المدرج ، ولذلك لا يمكن أن نستدل إحصائياً على معدلات مجتمعين مختلفين .

وفي هذه الحالة تكون الحالة غير صحيحة والحقيقة لمعدلين مختلفين وعندئذ لا ترفض فرضية العدم وعندما ترفض الفرضية (عندما تكون خاطئة) فإننا نحدد نمط الخطأ II كما هو موضح في الجدول ؟؟ .

الأخطاء في فرضية العدم

لا ترفض فرضية العدم Ho	رفض فرضية العدم Ho	الوصف
القرار صحيح	نمط الخطأ I	فرضية العدم حقيقية Ho
نمط الخطأ II	القرار صحيح	فرضية العدم خاطئة Ho